Colle du 08/04 - Sujet 1
Applications linéaires

Question de cours. Démontrer le théorème du rang sans les cas particuliers où $n = 0$ ou $p = 0$.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n, U un sous-espace vectoriel de E et $A = \{ f \in \mathscr{L}(E) \mid U \subseteq \mathrm{Ker}(f) \}$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit V un supplémentaire de U dans E. Montrer que A est isomorphe à $\mathscr{L}(V, E)$.

Colle du 08/04 - Sujet 2
Applications linéaires

Question de cours. Montrer que l'image d'une base est libre si et seulement si l'application est injective.

Exercice 1.

1. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P + P'' \end{array}$. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P + P'' \end{array}$. Montrer que φ est un automorphisme.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel et $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. On suppose $\varphi \neq 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$.

1. Montrer que φ est surjective.
2. Soit $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(x)$.

Colle du 08/04 - Sujet 3
Applications linéaires

Question de cours. Démontrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ X \mapsto (2X+1)P + \left(1 - X^2\right)P' \end{array}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est linéaire.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Si $n = 2$ calculer $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \times E \\ P \mapsto (P(0), P') \end{array}$.

1. Montrer que φ est linéaire et déterminer son noyau et son image.
2. Même question si $E = \mathbb{R}[X]$. En déduire la dimension de $\mathbb{R}[X]$.